

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Giả sử giá cả của hàng hóa A được căn cứ vào giá cả và lượng tồn đọng của cung ở thời kỳ trước. Mô hình cụ thể như sau:

$$p_{t+1} = p_t - \frac{1}{4}(S_t - D_t).$$

Trong đó,

- $D_t = 7 - 2p_t$ là hàm cầu của hàng hóa A ở thời điểm t .
- $S_t = -5 + 4p_t$ là hàm cung của hàng hóa A ở thời điểm t .
- p_t là mức giá của hàng hóa A ở thời điểm t .

Giả sử hàng hóa A có mức giá ban đầu $p_o = 4$. Xác định thời điểm gần nhất mà tại đó sự sai khác giữa giá thực tế và giá cân bằng liên thời p^* bé hơn 1%.

Lời giải. Nhắc lại rằng mức giá cân bằng liên thời trong trường hợp này là

$$p^* = \frac{7+5}{2+4} = 2.$$

Quỹ đạo giá với điều kiện $p_o = 4$ là:

$$p_t = \left(\frac{a+c}{b+d} \right) + \left(p_o - \frac{a+c}{b+d} \right) (1 - k(b+d))^t = 2 + 2\left(1 - \frac{1}{4} \times 6\right)^t = 2 + 2(-0.5)^t.$$

Để $|p_t - p^*| < 0.01$ thì ta cần có $0.5^t < 0.005$ hay $t \geq 8$. Do đó, thời điểm gần nhất thỏa yêu cầu đề bài là $t = 8$.

2. Giả sử giá cả của hàng hóa A được căn cứ vào giá cả và lượng tồn đọng của cung ở thời kỳ trước. Mô hình cụ thể như sau:

$$p_{t+1} = p_t - \lambda(S_t - D_t), \lambda > 0$$

Trong đó,

- $D_t = 7 - 2p_t$ là hàm cầu của hàng hóa A ở thời điểm t .
- $S_t = -5 + 4p_t$ là hàm cung của hàng hóa A ở thời điểm t .

- p_t là mức giá của hàng hóa A ở thời điểm t .

Xác định λ sao cho quỹ đạo giá ổn định.

Lời giải. Điều kiện để quỹ đạo giá ổn định là

$$\lambda < \frac{2}{b+d},$$

hay

$$\lambda < 1/3.$$

3. Giả sử việc sản xuất của hàng hóa A đòi hỏi phải có thời gian nhất định, nên người sản xuất dựa vào mức giá ở thời điểm trước đó để định hình mức sản xuất. Mô hình cụ thể như sau:

- Mức cầu $D_t = 15 - 6p_t$.
- Mức cung $S_t = -3 + 3p_{t-1}$.
- Phương trình cân bằng $S_t = D_t$.

Giả sử hàng hóa A có mức giá ban đầu $p_o = 4$. Xác định thời điểm gần nhất mà tại đó sự sai khác giữa giá thực tế và giá cân bằng liên thời p^* bé hơn 1%.

Lời giải. Nhắc lại rằng mức giá cân bằng liên thời trong trường hợp này là $p^* = \frac{15+3}{6+3} = 2$. Ngoài ra, p_t được xác định bởi

$$p_t = \left(\frac{a+c}{b+d} \right) + \left(p_o - \frac{a+c}{b+d} \right) \left(\frac{d}{b} \right)^t.$$

Do đó ta có

$$p_t = 2 + 2 \times 0.5^t$$

Để $|p_t - p^*| < 0.01$ thì ta cần có $0.5^t < 0.005$ hay $t \geq 8$. Do đó, thời điểm gần nhất thỏa yêu cầu đề bài là $t = 8$.

4. Cho mô hình sau:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (0.0.0.1)$$

$$C_t = \alpha[Y_t + E_t(Y_{t+1})] + \epsilon_t, \quad \alpha > 0 \quad (0.0.0.2)$$

$$I_t = \beta[E_t(Y_{t+1}) - E_{t-1}(Y_t)] + \mu_t, \quad \beta > 0 \quad (0.0.0.3)$$

Trong đó Y_t, C_t, I_t, G_t lần lượt là thu nhập quốc dân, tiêu dùng, đầu tư, và chi tiêu của chính phủ trong kỳ t , ϵ_t, μ_t là các sai số ngẫu nhiên, giả thiết là các nhiễu trắng.

Phương trình 0.0.0.1 là phương trình cân bằng.

Phương trình 0.0.0.2 là hàm tiêu dùng, đề cập đến việc tiêu dùng kỳ hiện tại phụ thuộc vào thu nhập kỳ hiện tại và kỳ vọng về thu nhập tương lai.

Phương trình 0.0.0.3 là hàm đầu tư với giả thiết đầu tư của kỳ t phụ thuộc vào sự chênh lệch giữa thu nhập kỳ vọng trong kỳ t với thu nhập kỳ vọng trước đó.

Viết lại phương trình 0.0.0.1 dưới dạng mô hình động rời rạc, tuyến tính có yếu tố kỳ vọng hợp lý xét về cấu trúc.

Giải:

Thay phương trình (0.0.0.2), (0.0.0.3) vào (0.0.0.1) và đặt $X_t = 0$ dễ dàng có thể thấy (0.0.0.1) có thể được viết dưới dạng :

$$\begin{bmatrix} X_{t+1} \\ E_t(Y_{t+1}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & (1 - \alpha) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_t \\ \epsilon_t \\ \mu_t \end{bmatrix}$$

5. Giải Phương trình vi phân cấp 1: $\sin x dx = \ln y dy$

Giải:

Đây là phương trình tách biến. Tích phân hai vế ta được:

$$\begin{aligned} \int \sin x dx + C &= \int \ln y dy \\ \Leftrightarrow -\cos x + C &= y \ln y - \int y d(\ln y) \\ \Leftrightarrow -\cos x + C &= y \ln y - y \\ \Leftrightarrow y(\ln y - 1) - \cos x &= C \end{aligned}$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

Vậy, tích phân tổng quát của PTVP đã cho là:

$$y(\ln y - 1) - \cos x = C, y > 0, x \in \mathbb{R}$$

6. Mô hình **Solow** được cho bởi công thức:

$$\frac{dk}{dt} = s\phi(k) - \lambda k$$

Mô hình tăng trưởng Solow cho phép ta phân tích quỹ đạo thời gian của biến số k .

Tìm phân tích định lượng của hàm sản xuất có dạng hàm Cobb-Douglas và tìm trạng thái ổn định khi đó.

Giải:

Ta có:

$$Q = aK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad (a > 0, 0 < \alpha < 1)$$

nên:

$$\phi(k) = \frac{Q}{L} = a \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha = ak^\alpha$$

Do đó, mô hình Solow trở thành:

$$\frac{dk}{dt} = ask^\alpha - \lambda k \Leftrightarrow \frac{dk}{dt} + \lambda k = ask^\alpha$$

Nghiệm của phương trình trên là:

$$k = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{as}{\lambda} \right) e^{-\lambda(1-\alpha)t} + \frac{as}{\lambda} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

trong đó $k_0 = k(0)$.

Do $\lambda > 0$ và $1 - \alpha > 0$ nên $k \rightarrow \left(\frac{as}{\lambda} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ khi $t \rightarrow +\infty$. Vậy, trạng thái ổn định là:

$$\bar{k} = \left(\frac{as}{\lambda} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$